Asymptotique d'un Problème de Transport Optimal

G. Bouchitté*,C. Jimenez*, M. Rajesh+

* Laboratoire ANAM
Université de Toulon et du Var

+ Centro de Matemática et Aplicações Fundamentais
Universidad de Lisboa

1. Présentation du Problème:

Exemple: construction d'écoles

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ouvert borné
2. $f > 0$ s.c.i.: densité d'enfants sur Ω,
3. $\{x_1, ..., x_n\}$, n emplacements possibles d'écoles, $x_i \in \Omega$.
4. $\{A_1, ..., A_n\}$: zones de Ω correspondantes (partition de Ω).

Chaque école x_i accueille tous les enfants demeurant sur A_i.

Capacité c_i de x_i:

$$c_i = \int_{A_i} f(x)\ dx$$

Coût de construction de x_i: c_i^q, $0 \leq q < 1$.

On fixe $p \geq 1$ Coût de transport des enfants (pour ce paramétre p) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |x - x_i|^p \ f(x) \ dx \right)^{1/p}.$$

But: minimiser le transport avec un seuil de côut de construction donné k.

Écriture du problème:

$$\begin{aligned} &\xi(f, \Omega, k) \\ &= \ \inf_{n,(x_i),(A_i)} \left\{ \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |x - x_i|^p \ f(x) \ dx \Big)^{1/p} : \right. \\ &\qquad \left. \sqcup_i A_i = \Omega, \ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\displaystyle\int_{A_i} f(x) \ dx \Big)^q \leq k \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

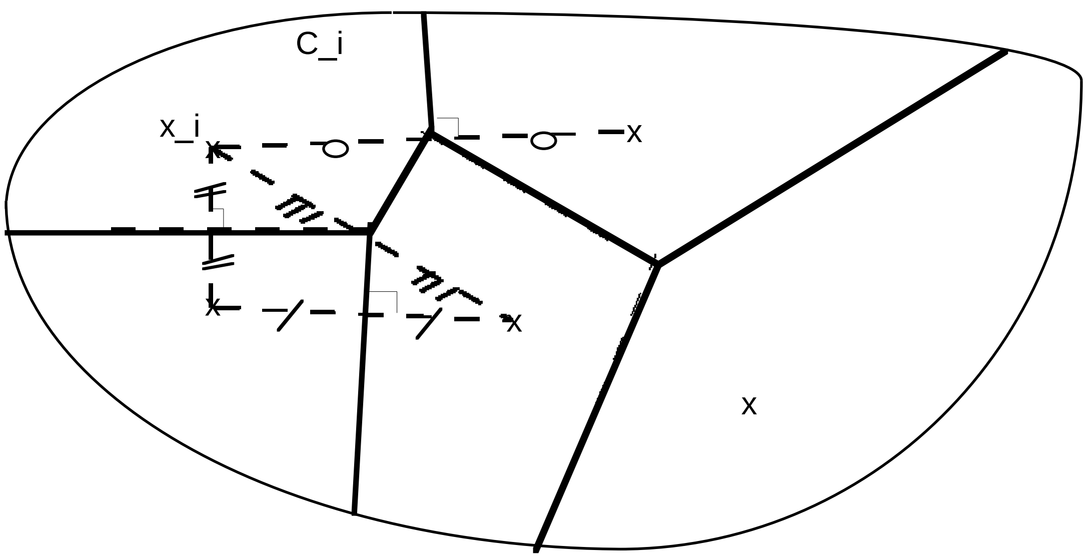
Question: comportement asymptotique de $\xi(f, k, \Omega)$ quand $k \to +\infty$?

2. Cas particulier: $q = 0$ ($k = n$) (Problème de positionnement optimal).

$$\xi(f, \Omega, k)$$
$$= \inf\{(\int_\Omega d^p(x, \Sigma) f(x) dx)^{1/p} \ : \ \mathrm{card}(\Sigma) \leq k\}$$
$$= \inf_{(x_i)}\{(\sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} |x - x_i|^p f(x) \ dx)^{1/p} \ : x_i \in \Omega\}.$$

$C_i = C_i(x_1, .., x_k)$: cellule de Voronoi associée à x_i,

$$C_i(x_1, ..., x_k) = \{x \in \Omega : \ |x - x_i| \leq |x - x_j|, j = 1, ..., k\}.$$



3. Historique du problème q=0:

1. 1982, J.A. Bucklew et G.L. Wise

$$k^{1/d}\xi(f,\Omega,k) \to C(d,p)\left(\int_\Omega f(x)^{\frac{d}{p+d}}\ dx\right)^{\frac{p+d}{d}},$$

$C(d,p)$ définie par:

$$k^{1/d}\xi(1_{[0,1[^d},[0,1[^d,k) \longrightarrow C(d,p).$$

Calcul de $C(p,d)$: On attend une forme du type:

$$\frac{1}{|H|^{p+d}}\Big(\int_H |x|^p\ dx\Big)^{1/p}$$

où H est un polytope régulier centré en O.

$d=1$, $C(p,1) = \Big(\int_{-1/2}^{1/2} |x|^p\ dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{1/p}$.

$d=2$, $p=2$ D.J. Newman, H hexagone

$C(2,2) = \left(\frac{5}{18\sqrt{3}}\right)^{1/2}$

$d = 2$, $p = 1$, (2002), R. Bolton et F. Morgan, H hexagone

$$C(1,2) = \frac{\mathrm{Log}3 + \frac{4}{3}}{4(3\sqrt{\frac{3}{2}})^{1/2}}.$$

2. Existence de méthodes numériques,

exemple: algorithme de Kohonen (Voir les travaux de Pagès).

$f = 1$, on observe l'apparition des hexagones.

Objectifs: 1. f non constante

2. $q \neq 0$ et autres coûts du type $\sum g\Big(\int_{A_i} f(x)\ dx\Big) \leq k$, où $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Méthode: Etude asympotique d'un problème de transport.

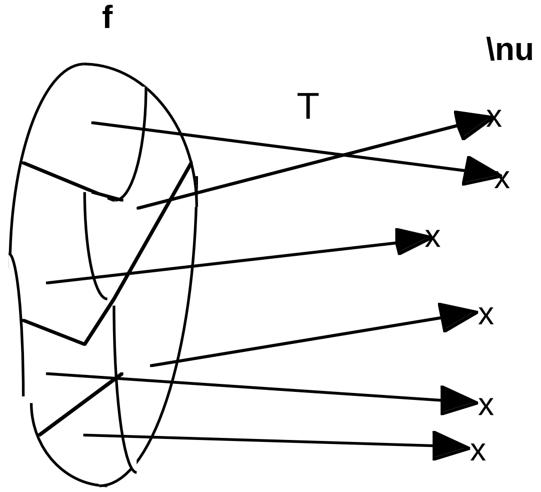
4. Lien avec la théorie du transport de masse de Monge-Kantorovitch:

p-distance de Wasserstein entre deux mesures: $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathcal{M}^+(\bar\Omega),\ \mu_1(\bar\Omega) = \mu_2(\bar\Omega)$.

$$W_p(\mu_1, \mu_2)$$
$$= \inf \Big\{ \big(\int_{\bar\Omega} |x - Tx|^p d\mu_1(x) \big)^{1/p} :\ (T)_\sharp(\mu_1) = \mu_2 \Big\}.$$

(Définition: $T_\sharp \mu_1(A) = \mu_1(T^{-1}(A))$.)

Réécriture du problème: $\mu_1 = f,\ \mu_2 = \nu = \sum c_i \delta_{x_i},\ c_i = \int_{A_i} f(x)dx$



Alors:

$$\xi(f,\Omega,k)$$
$$=\inf_\nu\{W_p(f,\nu):\ \nu=\textstyle\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i},\ \sum_{i=1}^n (c_i)^q\le k\}.$$

Remarque: si $q=0$:

$$\xi(f,\Omega,k)=\inf\{W_p(f,\nu)\ :\ \sharp(\mathrm{spt}\nu)\le k\}.$$

5. Réécriture du problème, $\Gamma-$convergence: (cf G. Dal Maso, H. Attouch)

Estimation à priori:

$$ck^{-1/d(1-q)}\le\xi(f,\Omega,k)\le Ck^{-1/d(1-q)}.$$

Petit paramétre: $k^{\frac{1}{d(1-q)}}=\frac{1}{\epsilon}$

$$\Phi_\epsilon(\nu,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\epsilon}W_p(f,\nu)\ \text{si}\\ \qquad\mu(.)=\epsilon^{d(1-q)}\displaystyle\sum_{x\in\mathrm{spt}\nu}\nu(x)^q\delta_x,\\ \qquad\nu\ \text{discret}\\ \\ +\infty\ \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors:

$$k^{\frac{1}{d(1-q)}}\xi(f,\Omega,k) = \inf\{\Phi_\epsilon(\nu,\mu):\ \ \mu(\bar{\Omega}) \leq 1\}.$$

On a besoin d'une notion de convergence pour Φ_ϵ qui nous donne la convergence de $\inf \Phi_\epsilon$.

Définition: X un métrique, $F_\epsilon, F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$F_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ si $\forall\ x \in X$:

1. $x_\epsilon \to x \Longrightarrow \liminf_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(x_\epsilon) \geq F(x)$.

2. $\exists (x_\epsilon):\ \ x_\epsilon \to x,\ \ \limsup F_\epsilon(x_\epsilon) \leq F(x)$.

Propriété: F_ϵ équicoercive, $F_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} F \Longrightarrow$

$$\inf_X F_\epsilon \longrightarrow \inf_X F.$$

6. Résultats:

Lemme: $C(p,d,q) := \lim_{k\to+\infty} k^{\frac{1}{d(1-q)}} \times \xi(1,[0,1[^d,k)$ existe.

Théorème: $\phi_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} \Phi$

$$\Phi(\nu,\mu) := \begin{cases} C(p,d,q)\Big(\int_\Omega \frac{f(x)^{1+\frac{pq}{d(1-q)}}}{\mu_a^{p/d(1-q)}(x)}\ dx\Big)^{1/p} \\ \quad \text{si } \nu = f, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

μ_a: partie absolument continue par rapport à Lebesgues de μ.

Corollaire: $\mu_{\text{opt}} = f(x)^{\frac{d(1-p)+pq}{d(1-q)+p}} \left(\int_\Omega f(x)^{\frac{d(1-p)+pq}{d(1-q)+p}} \right)^{-1}$

$$\lim_{k\to+\infty} k^{1/(d(1-q))} \xi(f,\Omega,k)$$
$$= \left(C(d,p,q) \int_\Omega f(x)^{\frac{d(1-q)+pq}{d(1-q)+p}}\ dx \right)^{\frac{1}{d(1-q)}+\frac{1}{p}}.$$

Démonstration du lemme:

$$S_q(A) = \inf\{W_p^p(1_A,\nu) \ : \ \nu = \sum c_i \delta_{x_i}, \sum c_i^q \leq |A|, \mathrm{spt}\nu \subset A\}.$$

$$\lim_{k\to+\infty} k^{\frac{1}{d(1-q)}} \xi(1,[0,1[^d,k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{S_q([0,k[^d}{k^d}.$$

Démonstration du théorème (schéma):

1. $(\nu_\epsilon,\mu_\epsilon) \to (\nu,\mu)$ telle que $\Phi_\epsilon(\nu,\mu) \leq C$.

T_ϵ telle que:

$$\Phi_\epsilon(\nu_\epsilon,\mu_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\left(\int_\Omega |x - T_\epsilon(x)|^p f(x)\ dx\right)^{1/p}.$$

$m_\epsilon = \frac{|x-T_\epsilon(x)|}{\epsilon^p} f(x)$ bornée, $m_{\epsilon_k} \to m$.

$$\liminf \Phi_\epsilon^p(\nu_\epsilon,\mu_\epsilon) \geq \int_\Omega m_a(x)\ dx.$$

Il suffit donc de montrer que, p.p x_o:

$$m_a(x_o) \geq C(d,p,q)^p \frac{f(x_o)^{1+\frac{pq}{d(1-q)}}}{\mu_a(x_o)^{\frac{p}{d(1-q)}}}.$$

Méthode: se ramener au cas du lemme par blow-up (sur un cube de côté $\delta \to 0$.)

2. But: construire $(\nu_\epsilon, \mu_\epsilon)$ telle que: $(\nu_\epsilon, \mu_\epsilon) \to (\nu, \mu)$ et

$$\limsup \Phi_\epsilon(\nu_\epsilon, \mu_\epsilon) \leq \Phi(\nu, \mu).$$

Grand paramétre: λ.

On divise Ω en petits cubes de côté $\epsilon' = \lambda\epsilon$.

Sur chacun de ces cubes $Q_{i,\epsilon}$, on définit $\nu_{i,\epsilon}$ optimal pour $\xi(\int_{Q_{i,\epsilon}} f, Q_{i,\epsilon}, m_{i,\epsilon})$ où $m_{i,\epsilon} = \frac{\mu(Q_{i,\epsilon})}{\epsilon^{d(1-q)}}$.

On obtient ν en faisant la somme de ces mesures.

$\mu_\epsilon = \epsilon^{d(1-q)} \sum \nu_\epsilon^q(x) \delta_x$.

On fait tendre ϵ vers 0 dans $\Phi_\epsilon(\nu_\epsilon, \mu_\epsilon)$ puis λ vers l'infini.