

# Dénombrement des classes de symétries des polyominos hexagonaux convexes

Dominique Gouyou-Beauchamps and Pierre Leroux

ABSTRACT. In this paper, we enumerate the symmetry classes of convex polyominoes on the honeycomb lattice (*hexagonal polyominoes*). Here *convexity* is to be understood as convexity along the three main column directions. We deduce the generating series of *free* (i.e. up to reflection and rotation) and of asymmetric convex hexagonal polyominoes, according to area and half-perimeter. See [?] for a longer version in English.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous dénombrons les classes de symétrie des polyominos hexagonaux convexes. Ici, la convexité est par rapport aux trois directions principales des colonnes. Nous en deduisons les séries génératrices des polyominos hexagonaux convexes *libres*, c'est-à-dire à réflexions et rotations près, ou encore de ceux qui sont asymétriques, selon l'aire et le demi-périmètre.

## 1. Introduction

Un *polyomino hexagonal*, est un ensemble fini connexe de cellules de base d'un réseau hexagonal du plan. Sauf mention contraire, les polyominos considérés ici seront toujours hexagonaux. L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le composent; son *périmètre* est le nombre de segments qui composent sa frontière. On dit qu'un polyomino est *convexe selon une direction* donnée si l'intersection du polyomino avec toute droite parallèle à cette direction et passant par le centre d'une cellule est connexe. Les directions sont caractérisées par l'angle  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ) qu'elles font avec l'axe horizontal positif, calculé dans le sens anti-horaire.

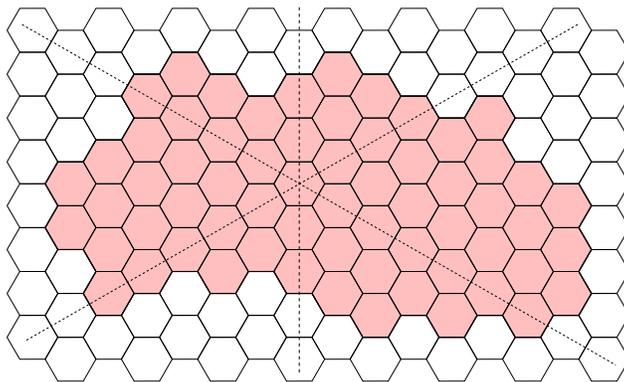


FIGURE 1. Un polyomino convexe et les directions de convexité

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 05A15 05A30; Secondary 82B20.

*Key words and phrases*. polyomino enumeration, convex polyominoes, honeycomb lattice, symmetry classes.  
With the partial support of CNRS (France), NSERC (Canada), and FCAR (Québec).

Plusieurs concepts de convexité ont été introduits dans la littérature pour les polyominos hexagonaux, selon les directions de convexité demandées. Suivant la nomenclature de Denise, Dür, et Hassani (voir [?]), signalons les polyominos  $EG$ -convexes, où  $\alpha = 0$  et  $\pi/2$ , étudiés par Guttmann et Enting [?] et par Lin et Chang [?], les polyominos  $C^1$ -convexes, où  $\alpha = \pi/2$ , énumérés selon plusieurs paramètres par Lin et Wu [?] et par Feretić et Svrtnan [?], les polyominos fortement convexes ( $F$ - ou  $F^3$ -convexes), où  $\alpha = 0, \pi/3$  et  $2\pi/3$ , introduits par Hassani [?] et étudiés dans [?], et finalement les  $C$ - ou  $C^3$ -convexes, où  $\alpha = \pi/6, \pi/2$  et  $5\pi/6$ , introduits et énumérés suivant le périmètre dans [?] et [?]. En particulier, Hassani donne explicitement la série algébrique qui énumère les polyominos  $C$ -convexes suivant le demi-périmètre.

Ce sont ces derniers polyominos qui nous intéressent ici et que nous appelons tout simplement *convexes*. Ce concept généralise bien la convexité des polyominos dans un réseau carré car les directions de convexité sont celles des colonnes principales du réseau hexagonal. La figure 1 représente un polyomino convexe d'aire 64 et de périmètre 70.

Ces polyominos sont traditionnellement pris à translation près. Il est cependant naturel de les considérer également à rotation et réflexion près, comme des objets qui vivent dans l'espace. Suivant Vöge, Guttmann et Jensen [?], nous appelons ces classes d'équivalences *polyominos libres*. En chimie organique, ces objets représentent des molécules d'hydrocarbures benzénoides. Voir [?] où ces molécules (sans la propriété de convexité) sont énumérées par génération exhaustive.

Notre objectif est donc de dénombrer les polyominos convexes *libres*, selon l'aire et le demi-périmètre. Pour cela, nous les considérons comme les orbites du groupe diédral  $\mathcal{D}_6$ , des isométries de l'hexagone, agissant sur les polyominos convexes, et nous faisons appel à la Formule de Cauchy-Frobenius (alias Lemme de Burnside). Nous sommes donc amenés à dénombrer les classes de symétries de polyominos convexes, c'est-à-dire les polyominos laissés fixes par chacun des éléments du groupe  $\mathcal{D}_6$ , suivant la démarche entreprise dans Leroux, Rassart et Robitaille [?] pour le réseau carré.

Pour toute classe de polyominos (hexagonaux) convexes  $\mathcal{F}$ , nous notons  $\mathcal{F}(x, q, u, v, t)$  sa série génératrice, où la variable  $x$  compte le nombre de colonnes,  $q$  compte l'aire,  $u$  compte la taille de la première (à gauche) colonne,  $v$ , la taille de la dernière colonne, et  $t$  le demi-périmètre. Par exemple, le polyomino de la figure 1 est de poids  $x^{14}q^{64}u^2v^3t^{35}$ . Il est possible que les variables n'apparaissent pas toutes à la fois. Les séries génératrices seront données par des formules explicites ou implicites qui se prêtent bien à l'utilisation du calcul formel.

## 2. Préliminaires

**2.1. Classes particulières de polyominos convexes.** Quelques classes familières de polyominos convexes du réseau carré se retrouvent naturellement sur le réseau hexagonal et s'avèrent utiles par la suite. C'est le cas notamment des polyominos *partages* et *parallélogrammes*. Par contre, pour les polyominos tas, une variante distincte apparaît.

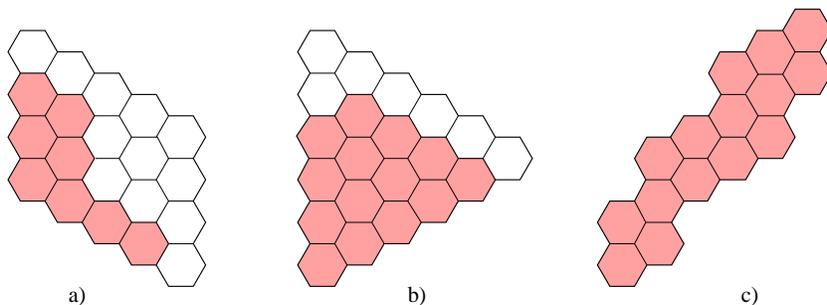


FIGURE 2. polyominos partages et parallélogrammes

2.1.1. *Les polyominos partages.* La figure 2a représente le partage (4, 2, 2) inscrit dans un *rectangle* de taille  $5 \times 4$  dans le réseau hexagonal. De même, la figure 2b représente le partage en parts distinctes et bornées par 6, (5, 4, 3, 2). Notons par  $D_m(u, q)$  le polynôme générateur des partages en parts distinctes bornées par  $m$ , où la variable  $u$  compte le nombre de parts. On a

$$(2.1) \quad D_m(u, q) = (1 + uq)(1 + uq^2) \cdots (1 + uq^m) \text{ et } D_0(u, q) = 1.$$

2.1.2. *Les polyominos parallélogrammes.* La figure 2c représente un polyomino parallélogramme (*stair-case* en anglais) du réseau carré (voir par exemple [?] ou [?]) reporté sur le réseau hexagonal. On remarque que le demi-périmètre est alors égal à  $2p - 1$  où  $p$  est le demi-périmètre sur le réseau carré. On sait que ces polyominos sont dénombrés selon le demi-périmètre par les nombres de Catalan et selon l'aire par la suite M1175 de [?] (A006958 de [?]) dont la série génératrice est un quotient de deux  $q$ -fonctions de Bessel.

On note  $\text{Pa}$  l'ensemble des polyominos parallélogrammes sur le réseau hexagonal et  $\text{Pa}(x, q, u, v, t)$  leur série génératrice. En analysant ce qui se passe lorsqu'on ajoute une colonne par la droite, la méthode de M. Bousquet-Mélou donne, pour  $\text{Pa}(v) = \text{Pa}(x, q, u, v, t)$  (comparer avec [?], Lemma 3.1),

$$(2.2) \quad \text{Pa}(v) = \frac{xquvt^3}{1 - quvt^2} + \frac{xquvt^2}{(1 - quvt^2)(1 - qv)} (\text{Pa}(1) - \text{Pa}(vq))$$

et

$$(2.3) \quad \text{Pa}(v) = \frac{J_1(1) + J_1(v)J_0(1) - J_1(1)J_0(v)}{J_0(1)},$$

où

$$J_1(v) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}v^{n+1}ut^{2n+3}q^{\binom{n+2}{2}}}{(quvt^2; q)_n (qv; q)_n (1 - q^{n+1}uvt^2)}$$

et

$$J_0(v) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n v^n t^{2n} q^{\binom{n+1}{2}}}{(quvt^2; q)_n (qv; q)_n}$$

La série  $\text{Pa}_{i,j}(x, q, t)$  est définie comme le coefficient de  $u^i v^j$  dans  $\text{Pa}(x, q, u, v, t)$ :

$$(2.4) \quad \text{Pa}(x, q, u, v, t) = \sum_{i \geq 1, j \geq 1} \text{Pa}_{i,j}(x, q, t) u^i v^j.$$

2.1.3. *Les polyominos tas.* Pour les polyominos *tas*, il existe une variante pour le réseau hexagonal, représentée à la figure 3. Ce sont des empilements pyramidaux d'hexagones, vus de côté. La première classe (figure 3a), notée  $T$ , a été considérée dans la littérature sous le nom de *pyramidal stacking of circles*, voir [?]. Leur série selon l'aire est référencée sous les numéro M0687 dans [?] et A001524 dans [?].

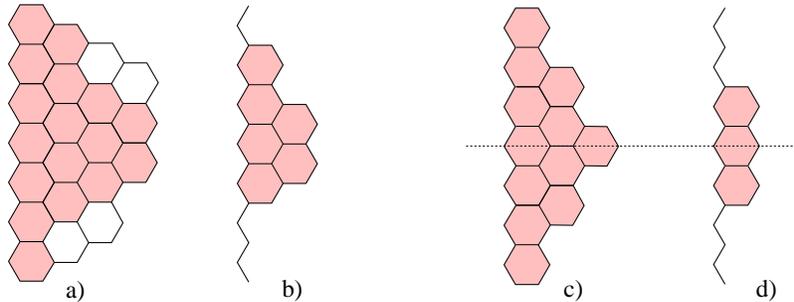


FIGURE 3. Tas et tas symétrique

Soit  $T(x, u, q)$ , la série génératrice des polyominos tas selon le nombre de colonnes (la *largeur*), la taille de la première colonne (la *hauteur*), et l'aire, et soit  $T_n(x, q) = [u^n]T(x, u, q)$ , la série génératrice des tas dont la première colonne est de taille  $n$ . Noter que le demi-périmètre est égal à deux fois la hauteur plus la largeur de sorte que la série  $T(xt, ut^2, q)$  tiendra compte également de ce paramètre.

On a

$$(2.5) \quad T(x, u, q) = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m q^{\binom{m+1}{2}} u^m}{((uq; q)_{m-1})^2 (1 - uq^m)}$$

et

$$(2.6) \quad T_n(x, q) = \sum_{m=1}^n x^m q^{n+\binom{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-m} \begin{bmatrix} m+j-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-j-2 \\ m-2 \end{bmatrix}_q.$$

Les polynômes  $T_n(x, q)$  peuvent aussi être calculés rapidement par récurrence en utilisant la classe  $T0_n$  des polyominos tas dont la première colonne est de taille  $n$  en incluant des cellules vides aux deux extrémités. Voir la figure 3b. En effet, on a

$$(2.7) \quad T_n(x, q) = xq^n T0_{n-1}(x, q).$$

avec  $T0_0(x, q) = 1$ ,  $T0_1(x, q) = 1 + xq$ , et, en raisonnant sur l'existence de cellules vides aux deux extrémités,

$$(2.8) \quad T0_n(x, q) = (xq^n + 2)T0_{n-1} - T0_{n-2},$$

**2.1.4. Les tas symétriques.** Les tas symétriques, par rapport à l'axe horizontal (voir les figures 3c et 3d), constituent les familles TS et TS0. Utilisant les mêmes notations que pour les tas, on a

$$(2.9) \quad TS(x, q) = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m u^m q^{m(m+1)/2} (1 + uq^m)}{(1 - u^2 q^2)(1 - u^2 q^4) \cdots (1 - u^2 q^{2m})}.$$

De plus,

$$(2.10) \quad TS_n(x, q) = xq^n TS0_{n-1}(x, q).$$

avec  $TS0_0(x, q) = TS0_{-1}(x, q) = 1$ , et

$$(2.11) \quad TS0_n(x, q) = xq^n TS0_{n-1}(x, q) + TS0_{n-2}(x, q),$$

**2.2. Le groupe diédral  $\mathcal{D}_6$ .** Le groupe diédral  $\mathcal{D}_6$  est défini algébriquement par

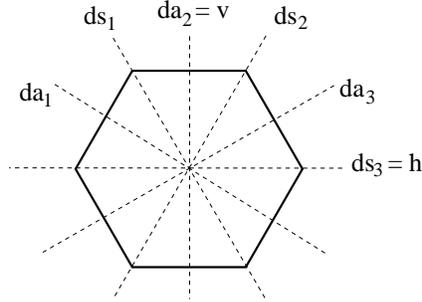
$$\mathcal{D}_6 = \langle \rho, \tau \mid \rho^6 = 1, \tau^2 = 1, \tau\rho\tau = \rho^{-1} \rangle.$$

Ici  $\mathcal{D}_6$  est réalisé comme le groupe des isométries de l'hexagone, avec  $\rho = r$  = la rotation de  $\pi/3$  radian (dans le sens horaire) et  $\tau = ds_3$ , la réflexion selon l'axe horizontal. On a

$$\mathcal{D}_6 = \{\text{id}, r, r^2, r^3, r^4, r^5, da_1, da_2, da_3, ds_1, ds_2, ds_3\},$$

où  $ds_2 = \tau\rho^2$ ,  $ds_1 = \tau\rho^4$ , les réflexions selon les axes sommet-sommet, et  $da_3 = \tau\rho$ ,  $da_2 = \tau\rho^3$ , et  $da_1 = \tau\rho^5$ , les réflexions selon les axes arêtes-arêtes. Voir la figure 4.

Le groupe diédral  $\mathcal{D}_6$  agit sur les polyominos (hexagonaux) de façon naturelle, par rotation ou réflexion. Pour toute classe de polyominos  $\mathcal{F}$ , munie d'un poids monomial  $w$  correspondant à certains paramètres, notons  $|\mathcal{F}|_w$  le poids total (i.e. la série génératrice) de cette classe. Si  $\mathcal{F}$  est invariante sous l'action de  $\mathcal{D}_6$ , l'ensemble des orbites de cette action est notée  $\mathcal{F}/\mathcal{D}_6$ . Le lemme de Burnside permet de dénombrer ces orbites en termes des ensembles  $\text{Fix}(g)$  de points fixes de chacun des éléments  $g$  de  $\mathcal{D}_6$ , les *classes de symétries* de  $\mathcal{F}$ . Notons  $fix(g) = |\text{Fix}(g)|_w$ . On a évidemment  $fix(r) = fix(r^5)$ ,  $fix(r^2) = fix(r^4)$  et, pour

FIGURE 4. Les réflexions de  $\mathcal{D}_6$ 

des raisons de symétries,  $fix(da_1) = fix(da_2) = fix(da_3)$  et  $fix(ds_1) = fix(ds_2) = fix(ds_3)$ . Par la suite, on choisira  $v = da_2$ , l'axe vertical, et  $h = ds_3$ , l'axe horizontal. On a alors

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}/\mathcal{D}_6|_w &= \frac{1}{12} \sum_{g \in \mathcal{D}_6} fix(g) \\
 (2.12) \qquad &= \frac{1}{12} (|\mathcal{F}|_w + 2fix(r) + 2fix(r^2) + fix(r^3) + 3fix(v) + 3fix(h)).
 \end{aligned}$$

**2.3. Phases de croissance des polyominos convexes.** Tout polyomino convexe peut être décomposé en blocs selon les phases de croissances, de gauche à droite, de ses profils supérieur et inférieur. La figure 5 donne un exemple de cette décomposition. Le profil supérieur  $y$  est représenté par le chemin de  $A$  à  $B$  le long de la frontière supérieure, et le profil inférieur, par le chemin de  $C$  à  $D$ . Sur le profil supérieur, on parle d'une *croissance faible* si le niveau monte d'un demi-hexagone seulement par rapport à la colonne précédente, et d'une *croissance forte* si le niveau monte de plus d'un demi-hexagone. On définit de manière analogue la *décroissance faible* ou *forte*. Sur le profil inférieur, une croissance correspond à une descente et une décroissance, à une montée.

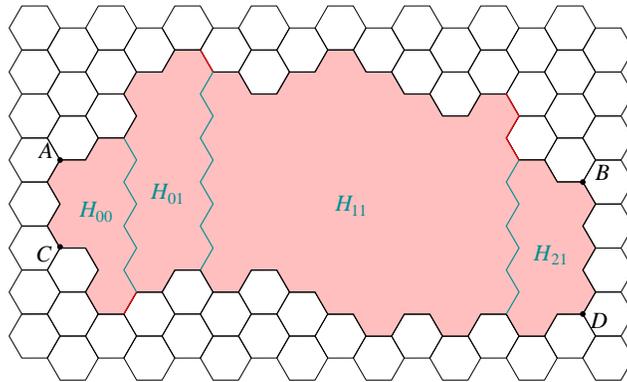


FIGURE 5. Phases d'un polyomino convexe

On décrit l'état dans lequel se trouve une colonne par un couple  $(i, j)$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ , la première composante correspondant au profil supérieur et la deuxième, au profil inférieur. L'état 0 correspond à une croissance faible ou forte, au début du polyomino, l'état 1 à une croissance ou une décroissance faible, dans une phase d'oscillation, et l'état 2, à une décroissance forte ou faible, dans la dernière partie du polyomino. Pour passer de l'état 0 à l'état 1, il doit y avoir une première décroissance, et pour passer de l'état 1 à l'état

2, il doit y avoir une décroissance forte. Enfin, on ne peut passer de l'état 1 à l'état 0 ni de l'état 2 à l'état 1 ou 0. Finalement, un bloc  $H_{ij}$  est caractérisé par une suite maximale de colonnes consécutives qui sont dans l'état  $(i, j)$ .

On peut donc voir un polyomino convexe comme un assemblage de blocs et leur dénombrement passe par celui des  $H_{ij}$ . Nous donnons ici les diverses séries génératrices de la forme  $H_{ij}(x, q, u, v, t)$ .

**2.4. Les familles  $H_{00}$  et  $H_{22}$ .** Les polyominos des classes  $H_{00}$  et  $H_{22}$  sont faciles à énumérer car ce sont en fait des polyominos tas. Ici, une seule des deux variables  $u$  et  $v$  est utilisée à la fois. On a

$$(2.13) \quad H_{22}(x, q, u, t) = T(xt, ut^2, q) \text{ et } H_{00}(x, q, v, t) = T(xt, vt^2, q),$$

où  $T(x, u, q)$  est donnée par la formule (2.5).

**2.5. Les familles  $H_{01}$ ,  $H_{10}$ ,  $H_{12}$ , et  $H_{21}$ .** Les classes de polyominos  $H_{01}$ ,  $H_{10}$ ,  $H_{12}$ , et  $H_{21}$  sont en bijection entre elles par les réflexions horizontales et verticales et sont donc équivalentes à dénombrer. La figure 6 illustre un polyomino de  $H_{10}$ . On trouve facilement que

$$(2.14) \quad H_{10}(x, q, u, v, t) = \frac{xquvt^3}{1 - quvt^2} + \frac{xt^2(1 + qvt)}{1 - qvt^2} H_{10}(x, q, u, vq, t)$$

$$(2.15) \quad = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m q^m uvt^{2m+1} (-qvt; q)_{m-1}}{(qvt^2; q)_{m-1} (1 - q^m uvt^2)}.$$

La formule (2.15) se voit directement sur la figure 6. On peut aussi y voir que

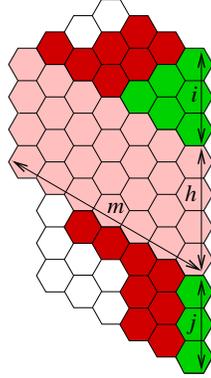


FIGURE 6. Polyomino de  $H_{10}$

$$(2.16) \quad H_{10}(x, q, u, v, t) = \sum_{h \geq 1} u^h v^h \sum_{m \geq 1} x^m q^{mh} \sum_{i=0}^{m-1} v^i q^{\binom{i+1}{2}} \begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}_q \sum_{j \geq 0} v^j q^j t^{2m+2h+i+2j-1} \begin{bmatrix} m-2+j \\ j \end{bmatrix}_q.$$

Noter que

$$H_{01}(x, q, u, v, t) = H_{10}(x, q, u, v, t)$$

et que

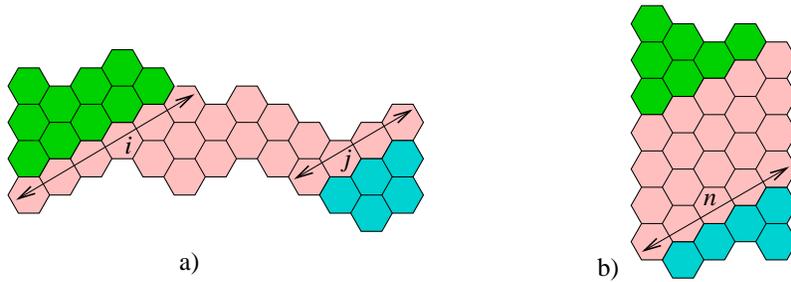
$$H_{12}(x, q, u, v, t) = H_{21}(x, q, u, v, t) = H_{10}(x, q, v, u, t)$$

.

**2.6. Les familles  $H_{02}$  et  $H_{20}$ .** Ces deux classes sont en fait équivalentes aux polyominos parallélogrammes:

$$(2.17) \quad H_{02}(x, q, u, v, t) = \text{Pa}(x, q, u, v, t) = H_{02}(x, q, u, v, t).$$

**2.7. La famille  $H_{11}$ .** La classe  $H_{11}$  contient les polyominos convexes dont les profils supérieur et inférieur oscillent tous les deux. Lorsque l'on examine la rangée connexe d'hexagones dans l'axe  $da_3$  (voir Figure 4) contenant la cellule inférieure de la première colonne, on voit apparaître deux sous-classes de  $H_{11}$ . La première classe, notée  $H_{11a}$ , est celle où cette rangée et celles qui sont à sa droite (jusqu'à la dernière colonne) forment un polyomino parallélogramme (incliné de  $\pi/3$ ); voir la figure 7a. La deuxième classe, notée  $H_{11b}$ , est celle où cette rangée est la base d'un rectangle de hauteur au moins 2; voir la figure 7b. Dans les deux cas, on retrouve au-dessus et au-dessous de ces objets (parallélogramme ou rectangle) des partages en parts distinctes qui sont justifiés à gauche et à droite, respectivement.

FIGURE 7. Polyominos de  $H_{11}$ 

Rappelons que dans la série  $Pa_{i,j}(x, q, t)$ , définie par (2.4), la variable  $x$  marque le nombre de colonnes du parallélogramme (non incliné). Notons plutôt le lien entre sa largeur  $\ell$ , lorsqu'incliné, et son demi-périmètre  $p$ :  $p = 2\ell + 1$ . On a donc

$$(2.18) \quad H_{11}(x, q, u, v, t) = H_{11a}(x, q, u, v, t) + H_{11b}(x, q, u, v, t),$$

avec

$$(2.19) \quad H_{11a}(x, q, u, v, t) = \sum_{i \geq 1, j \geq 1} x^{-\frac{1}{2}} uv Pa_{i,j}(1, q, tx^{\frac{1}{2}}) D_{i-1}(ut, q) D_{j-1}(vt, q)$$

et

$$(2.20) \quad H_{11b}(x, q, u, v, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n q^{2n} u^2 v^2 t^{2n+3} D_{n-1}(ut, q) D_{n-1}(vt, q)}{1 - q^n uvt^2}.$$

### 3. Les polyominos convexes

Notons  $C$ , la classe de tous les polyominos convexes et  $C_{ij}$ , la sous-classe des polyominos dont la dernière colonne est dans l'état  $(i, j)$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ . Ceci détermine une partition de  $C$ . Pour dénombrer  $C$ , il faut donc dénombrer chacune des classes  $C_{ij}$ . Nous donnons les séries génératrices  $C_{ij}(x, q, v, t)$ , suivant essentiellement la méthode de Hassani [?], utilisant la décomposition d'un polyomino convexe selon les phases de croissance, de gauche à droite.

Nous utilisons la notation  $C_{ij} \otimes H_{i'j'}$  pour désigner l'ensemble des polyominos convexes obtenus en recollant de toutes les façons légales possibles un polyomino de  $C_{ij}$  avec un de  $H_{i'j'}$ . On introduit les séries  $C_{ij,n}(x, q, t)$  et  $H_{ij,n}(x, q, v, t)$  par les extractions de coefficients

$$(3.1) \quad C_{ij,n}(x, q, t) = [v^n] C_{ij}(x, q, v, t) \text{ et } H_{ij,n}(x, q, v, t) = [u^n] H_{ij}(x, q, u, v, t).$$

Par exemple, on a  $C_{00} = H_{00}$ ,  $C_{10} = C_{00} \otimes H_{10}$  et

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad C_{10}(x, q, v, t) &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{t^{2k-1}} C_{00,k}(x, q, t) \right) H_{10,n}(x, q, v, t) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n t \Gamma_k(xt, q) \right) H_{10,n}(x, q, v, t) \\
 &= C_{01}(x, q, v, t).
 \end{aligned}$$

De même,  $C_{11} = (C_{00} + C_{10} + C_{01}) \otimes H_{11} = C_{00} \otimes H_{11} + C_{10} \otimes H_{11} + C_{01} \otimes H_{11}$  et

$$(3.3) \quad C_{00} \otimes H_{11}(x, q, v, t) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{t^{2n-2}} C_{00,n}(x, q, t) H_{11,n-1}(x, q, v, t),$$

$$(3.4) \quad C_{10} \otimes H_{11}(x, q, v, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t^{2n-1}} C_{10,n}(x, q, t) H_{11,n}(x, q, v, t) + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{t^{2n-2}} C_{10,n}(x, q, t) H_{11,n-1}(x, q, v, t).$$

On a aussi  $C_{02} = (C_{00} + C_{01}) \otimes H_{02}$ ,

$$C_{12} = (C_{00} + C_{01} + C_{10} + C_{11} + C_{02}) \otimes H_{12},$$

$$C_{22} = (C_{00} + C_{01} + C_{10} + C_{11} + C_{02} + C_{12}) \otimes H_{22}.$$

Finalement

$$(3.5) \quad C(x, q, v, t) = (C_{00} + 2C_{10} + C_{11} + 2C_{02} + 2C_{12} + C_{22})(x, q, v, t).$$

#### 4. Les classes de symétrie réflexives

**4.1. Symétrie verticale.** Considérons un polyomino convexe  $v$ -symétrique  $P$ . On constate que l'axe de symétrie passe par une colonne centrale. Notons  $K$  la région fondamentale gauche de  $P$ , incluant la colonne centrale. Voir la figure 8. On a

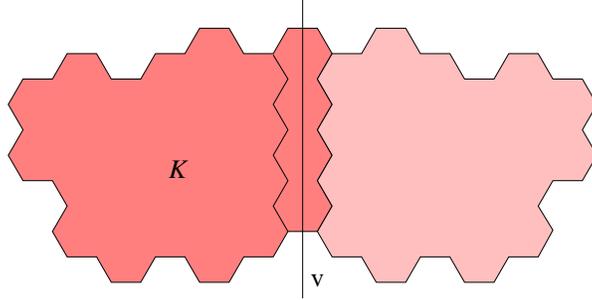


FIGURE 8. Polyomino convexe  $v$ -symétrique

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad K(x, q, v, t) &= C_{00}(x, q, v, t) + 2C_{10}(x, q, v, t) + C_{1,1}(x, q, v, t) \\
 &= \sum_{m \geq 1} K_m(x, q, t) v^m
 \end{aligned}$$

et

$$(4.2) \quad |Fix(v)|_{q,t} = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{q^m t^{2m+1}} K_m(1, q^2, t^2).$$

**4.2. Symétrie horizontale.** La classe  $S$  des polyominos convexes  $h$ -symétriques se partage en trois classes:  $S_a$  et  $S_b$ , suivant qu'on peut trouver ou non dans la partie oscillante un polyomino *pointe de flèche* (figures 9a et 9b) et la classe  $S_c$ , s'il n'existe pas de partie oscillante.

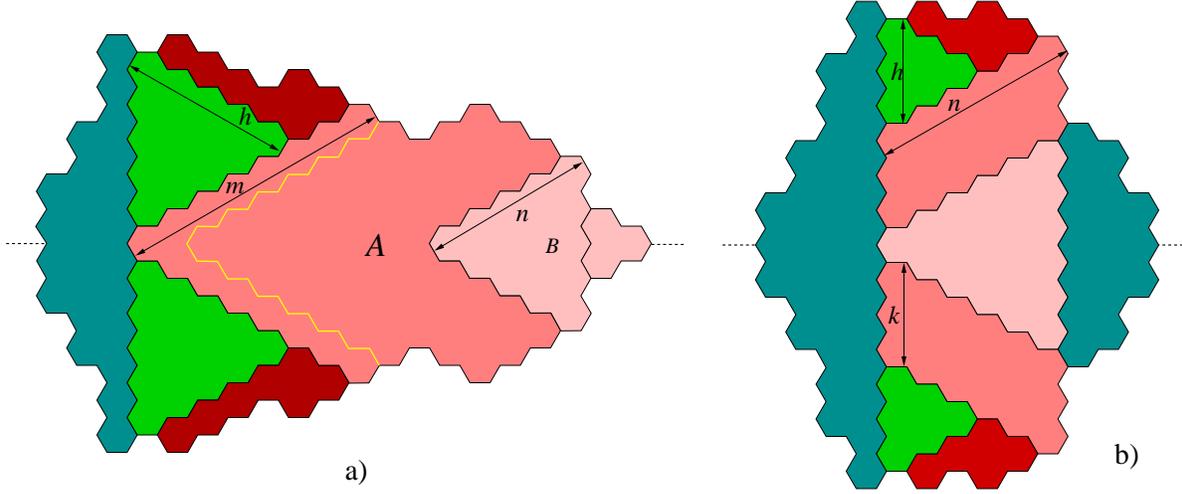


FIGURE 9. Polyominos convexes  $h$ -symétriques

Pour construire un polyomino de la classe *pointes de flèches*, notée  $A$ , on démarre avec un triangle de coté  $n$  auquel un tas symétrique est possiblement attaché pour former la phase  $H_{22}$ ; notons  $B$ , cette classe de polyominos de départ. On construit  $A$  à partir de  $B$  en attachant successivement des bandes en forme de  $V$  par la gauche, comme illustré à la figure 9a. On a donc

$$(4.3) \quad B(s, x, q, t) = sxtq^3 + \sum_{n \geq 2} s^n x^n q^{n(n+1)/2} t^{3n} \text{TSO}_{n-3}(xt, q),$$

où la variable  $s$  marque la taille de la partie supérieure gauche du dernier  $V$ , et la série génératrice  $A(s) = A(s, x, q, t)$  est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante, qui se résout par la méthode habituelle:

$$(4.4) \quad A(s) = B(s) + s^2 x^2 q^3 t^4 \frac{A(1) - A(sq^2)}{1 - sq^2}$$

Finalement, posant  $A(s, x, q, t) = \sum_{m \geq 1} A_m(x, t, q) s^m$  et tenant compte des décorations supplémentaires et des deux cas de parité de la première colonne de la partie oscillante, on a

$$(4.5) \quad \begin{aligned} S_a(x, t, q) &= \sum_{h \geq 0} q^{h(h+1)} t^{2h+2} \text{TS}_{2h+2}(xt, q) \sum_{m \geq h+1} \begin{bmatrix} m-1 \\ h \end{bmatrix}_{q^2} A_m(x, t, q) \\ &+ \sum_{h \geq 1} q^{h(h+1)} t^{2h+3} \text{TS}_{2h+1}(xt, q) \sum_{m \geq h} \begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix}_{q^2} A_m(x, t, q). \end{aligned}$$

Les calculs de  $S_b(x, t, q)$  et de  $S_c(x, t, q)$  sont plus simples et on trouve

$$(4.6) \quad \begin{aligned} S_b(x, t, q) &= \sum_{n \geq 1} x^n q^{\binom{n+1}{2}} t^{3n} \sum_{k \geq 1} q^{2kn} t^{4k} \text{TSO}_{n+2k-3}(xt, q) \sum_{h=0}^{n-1} t^{2h+2} q^{h(h+1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ h \end{bmatrix}_{q^2} \text{TS}_{2k+2h+2}(x, t, q) \\ &+ \sum_{n \geq 0} x^n q^{\binom{n+1}{2}} t^{3n} \sum_{k \geq 1} q^{2k(n+1)} t^{4k+1} \text{TSO}_{n+2k-3}(xt, q) \sum_{h=0}^n t^{2h+2} q^{h(h+1)} \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_{q^2} \text{TS}_{2k+2h+1}(x, t, q) \end{aligned}$$

et

$$(4.7) \quad S_c(x, t, q) = \sum_{h \geq 1} t^{2h} \text{TS}_h(xt, q) \text{TS}_{0_{h-3}}(xt, q).$$

Ainsi

$$(4.8) \quad |\text{Fix}(h)|_{q,t} = S_a(1, t, q) + S_b(1, t, q) + S_c(1, t, q).$$

## 5. Symétries de rotation

**5.1. Symétrie par rapport à la rotation  $r$  de  $\pi/3$  radian.** Les polyominos symétriques par rapport à la rotation  $r$  de  $\pi/3$  radian sont essentiellement des polyominos formés de grands hexagones décorés par des tas  $\text{T0}$ . On trouve

$$(5.1) \quad |\text{Fix}(r)|_{q,t} = \sum_{h \geq 1} t^{3(2h-1)} q^{3h(h-1)+1} \text{T0}_{h-1}(t^6, q^6).$$

**5.2. Symétrie par rapport à la rotation  $r^2$ , de  $2\pi/3$  radian.** Ce cas est plus complexe. Il faut d'abord distinguer le cas où le centre de rotation est au milieu d'un hexagone de celui où il est en un sommet. Ceci détermine deux sous-classes, notées  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Dans le premier cas, il y a trois sous-cas selon que  $h_1 > h_2$ ,  $h_2 > h_1$  ou  $h_1 = h_2$ , correspondant aux trois sous-classes  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ . La figure 10 illustre le premier cas  $\mathcal{P}_1$ . Cette figure ne représente qu'un tiers du polyomino  $r^2$ -symétrique, sa région fondamentale. On voit apparaître une nouvelle classe de polyominos hexagonaux convexes, les dirigés (vers le haut), à base diagonale, notée  $\mathcal{D}$ , qu'il faut d'abord dénombrer avant de déterminer  $\mathcal{P}_1(q, t)$ . Nous manquons d'espace ici pour donner les détails de ces calculs. Notons que pour des raisons de symétrie,  $\mathcal{P}_2(q, t) = \mathcal{P}_1(q, t)$ . Les calculs sont semblables pour la classe  $\mathcal{Q}$ , et

$$(5.2) \quad |\text{Fix}(r^2)|_{q,t} = 2\mathcal{P}_1(q, t) + \mathcal{P}_3(q, t) + 2\mathcal{Q}_1(q, t) + \mathcal{Q}_3(q, t).$$

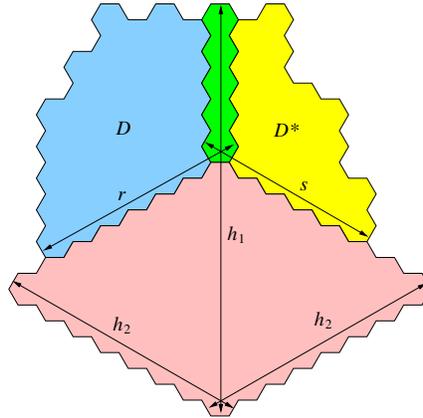


FIGURE 10. Région fondamentale d'un polyomino convexe  $r^2$ -symétrique dans  $\mathcal{P}_1$

**5.3. Symétrie par rapport à la rotation  $r^3$ , de  $\pi$  radian.** Si le centre de rotation est au milieu d'une arête, il y a trois cas similaires correspondant aux trois types d'arêtes. Prenons le cas de l'arête horizontale et notons  $\mathcal{A}$  la classe correspondante. On a

$$(5.3) \quad \mathcal{A}(x, q, t) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{xq^{2k}t^{4k+1}} (C_{00,2k} + 2C_{01,2k} + C_{11,2k} + 2C_{02,2k})(x^2, q^2, t^2)$$

Si le centre de rotation est au milieu d'un hexagone, on note  $\mathcal{H}$  la classe correspondante et on a

$$(5.4) \quad \mathcal{H}(x, q, t) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{xq^{2k+1}t^{4k+3}} (C_{00,2k+1} + 2C_{01,2k+1} + C_{11,2k+1} + 2C_{02,2k+1})(x^2, q^2, t^2).$$

Finalement,

$$(5.5) \quad |Fix(r^3)|_{q,t} = 3\mathcal{A}(1, q, t) + \mathcal{H}(1, q, t).$$

## 6. Conclusion

Il est maintenant possible d'utiliser la formule de Burnside (2.12), avec  $\mathcal{F} = C$ , pour dénombrer les polyominos convexes libres, c'est-à-dire à rotation et réflexion près, selon l'aire et le demi-périmètre. Quelques résultats numériques sont présentés dans les tableaux 1 et 2, selon l'aire seule (jusqu'à l'aire 20) ou le demi-périmètre seul (jusqu'au demi-périmètre 16). Voir sous la colonne *Orbites*. Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement par une énumération exhaustive par ordinateur.

Il est également possible de dénombrer les polyominos convexes asymétriques ou ayant exactement les symétries d'un sous-groupe donné  $H$  de  $\mathcal{D}_6$ , à l'aide de l'inversion de Möbius dans le treillis des sous-groupes de  $\mathcal{D}_6$ . Ce treillis et sa fonction de Möbius sont bien décrits dans la thèse de Stockmeyer [?] pour tout groupe diédral  $\mathcal{D}_n$ . Nous suivons ici cette nomenclature et quelques résultats se trouvent dans les tableaux 1 et 2. On voit bien sur ces tableaux que presque tous les polyominos convexes sont asymétriques.

On trouvera plus de détails dans la forme longue de ce résumé substantiel sur le site Web des archives mathématiques <http://arxiv.org> arXiv:math.CO/0403168.

## References

LRI, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD ET CNRS, ORSAY, FRANCE, F91405  
*E-mail address:* [dgb@lri.fr](mailto:dgb@lri.fr)  
*URL:* <http://www.lri.fr/~dgb>

LACIM ET DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL, CANADA, H3C3P8  
*E-mail address:* [leroux.pierre@uqam.ca](mailto:leroux.pierre@uqam.ca)  
*URL:* <http://www.lacim.uqam.ca>

TABLE 1. Classes de symétries des polyominoes hexagonaux convexes selon l'aire

Aire	id	$h$	$v$	$r$	$r^2$	$r^3$	Orbites	$\mathcal{D}_6$	$F_{31}$	$H_{31}$	$D_{21}$	Asym
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	3	1	1	0	0	3	1	0	0	0	1	0
3	11	3	3	0	2	3	3	0	2	0	1	0
4	38	2	4	0	2	12	6	0	0	2	2	24
5	120	6	10	0	0	12	15	0	0	0	2	72
6	348	6	12	0	6	42	38	0	2	0	2	264
7	939	9	27	1	3	37	91	1	1	3	3	816
8	2412	12	30	0	0	126	222	0	0	0	4	2184
9	5973	17	63	0	12	99	528	0	0	0	3	5640
10	14394	20	66	0	6	336	1250	0	2	4	4	13836
11	34056	30	142	0	0	252	2902	0	0	0	6	33324
12	79602	38	140	0	18	840	6751	0	2	0	4	78240
13	184588	46	310	1	13	616	15525	1	1	5	8	182952
14	426036	62	286	0	0	2028	35759	0	0	0	8	423012
15	980961	69	665	0	30	1461	82057	0	2	0	7	977316
16	2256420	100	580	0	18	4788	188607	0	0	6	8	2249640
17	5189577	115	1441	0	0	3435	433140	0	0	0	11	5181540
18	11939804	154	1184	0	50	11142	996255	0	2	0	12	11924676
19	27485271	175	3145	1	27	8005	2291941	1	1	7	13	27467376
20	63308532	238	2458	0	0	25800	5278535	0	0	0	16	63274740

TABLE 2. Classes de symétries des polyominoes hexagonaux convexes selon le demi-périmètre

$\frac{1}{5}$ pér.	id	$h$	$v$	$r$	$r^2$	$r^3$	Orbites	$\mathcal{D}_6$	$F_{31}$	$H_{31}$	$D_{21}$	Asym
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	3	1	1	0	0	3	1	0	0	0	1	0
6	2	2	0	0	2	0	1	0	2	0	0	0
7	12	2	4	0	0	6	3	0	0	0	2	0
8	18	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	12
9	59	5	9	1	5	19	11	1	3	3	3	24
10	120	8	0	0	0	0	12	0	0	0	0	96
11	318	10	24	0	0	48	39	0	0	0	6	204
12	714	14	0	0	12	0	65	0	4	0	0	672
13	1743	25	59	0	0	129	177	0	0	0	7	1368
14	4008	36	0	0	0	0	343	0	0	0	0	3900
15	9433	53	143	2	28	323	867	2	6	8	15	8616
16	21672	76	0	0	0	0	1825	0	0	0	0	21444